Matemaattisten tieteiden kandiohjelma / MTO

Tilastollinen päättely II

Kurssikoe 7.5.2018 (kesto 2h 30 min)

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu. Ei taulukkokirjaa

1. Olkoon $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ riippumattomia eksponenttijakautunutta satunnaismuuttujaa ja $Y_i \sim \text{Exp}(1/\mu)$ missä $\mu > 0$. Laske mallin Fisherin informaatio $i(\mu)$ parametrille μ. Olkoon
$$T = T^{(n)} = \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n}.$$
Näytä, että T on parametrin μ täystehokas harhaton estimaattori.

2. Oletetaan, että $Y_1, \ldots, Y_n \perp\!\!\!\perp$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, ja kunkin Y_i:n tiheysfunktio on
$$f(y;\theta) = \theta 2^{-\theta} y^{\theta-1} \mathbf{1}\{\, 0 < y < 2 \,\}$$
ja $\theta > 0$. Etsi jokin 1-ulotteinen parametrin θ tyhjentävä tunnusluku $t = t(\mathbf{y})$, kun aineisto $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Laske lisäksi parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaatti $\widehat{\theta}$. Onko tunnusluku $t(\mathbf{y})$ suurimman uskottavuuden estimaatin jokin muunnos eli onko $t(\mathbf{y}) = g(\widehat{\theta}(\mathbf{y}))$?

3. Oletetaan, että havaintoja $y_1, \ldots, y_n$ vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattava kukin samaa jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on
$$f(y;\theta) = \theta y^{\theta-1} \mathbf{1}\{\, 0 < y < 1 \,\}$$
ja $\theta > 0$ on positiivinen parametri. Halutaan testata nollahypoteesia $H_0 : \theta = 3$ kaksisuuntaista vastahypoteesia $H_1 : \theta \neq 3$ vastaan.

   a) Johda tätä varten sopiva Raon pistemäärätestisuure sekä

   b) johda sopiva uskottavuusosamäärän testisuure.

4. a) Selitä, mitä tarkoitetaan tarkentuvuudella?

   b) Perustele, miksi tehtävän 1 estimaattori $T = T^{(n)}$ on parametrin μ tarkentuva estimaattori.

   c) Oletaan, että $Y_1, \ldots, Y_5 \sim \text{Tas}(0, \theta) \perp\!\!\!\perp$ ovat riippumattomia tasajakautuneita satunnaismuuttujia ja $\theta > 0$. Olkoon $Y_{(5)} = \max(Y_1, \ldots, Y_5)$. Näytä, että $W = Y_{(5)}/\theta$ on saranasuure. (vihje: näytä, että kertymäfunktio $F_W(t) = t^5$ kun $0 < t < 1$.)

   d) Olkoon $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_5)$ aineisto, $y_i = Y_i(\omega)$ ja merkitään $y_{(5)} = \max(y_1, \ldots, y_5)$. Määrää sellainen $a > 0$, että väli $(y_{(5)}, y_{(5)}/a)$ on parametrin θ luottamustason 95 % luottamusväli c)-kohdan saranasuureen W avulla.

Jakaumia:

- Satunnaismuuttuja $X \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda)$ noudattaa gammajakaumaa parametreilla $\kappa > 0$, $\lambda > 0$. Sen tiheysfunktio on

$$f_X(x; \kappa, \lambda) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}\{ x > 0 \},$$

odotusarvo $\mathbb{E}X = \kappa/\lambda$ ja varianssi $\operatorname{var} X = \kappa/\lambda^2$. Riippumattomien gammajakautuneitten $X_i \sim \mathrm{G}(\kappa_i, \lambda)$ summa on gammajakautunut $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{G}(\sum \kappa_i, \lambda)$. Jos $X \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda)$ ja $c > 0$ vakio, niin $cX \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda/c)$.

- Satunnaismuuttuja $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ noudattaa eksponenttijakaumaa parametrilla $\lambda > 0$. Tämä on gammajakauman erikoistapaus $\mathrm{Exp}(\lambda) = \mathrm{G}(1, \lambda)$, ja sen tiheysfunktio on

$$f_Y(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y} \mathbf{1}\{ y > 0 \},$$

odotusarvo $\mathbb{E}Y = 1/\lambda$ ja varianssi $\operatorname{var} Y = 1/\lambda^2$. Eksponenttijakauman kertymäfunktio $F_Y(y) = (1 - e^{-\lambda y})\mathbf{1}\{ y > 0 \}$.

- Satunnaismuuttuja $Z \sim \chi^2_n$ noudattaa khiin neliön jakaumaa vapausasteella $n > 0$. Tämä on gammajakauman erikoistapaus $\chi^2_n = \mathrm{G}(n/2, 1/2)$ ja sen tiheysfunktio on siten

$$f_Z(z; n) = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)} z^{n/2-1} e^{-z/2} \mathbf{1}\{ z > 0 \},$$

odotusarvo $\mathbb{E}X = n$ ja varianssi $\operatorname{var} X = 2n$.

- Satunnaismuuttuja $W \sim \mathrm{Tas}(a, b)$ noudattaa tasajakaumaa välillä (a, b), missä $b > a$. Sen tiheysfunktio on

$$f_W(w; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{kun } a < w < b \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Odotusarvo $\mathbb{E}W = \frac{1}{2}(a + b)$ ja varianssi $\operatorname{var} W = \frac{1}{12}(b - a)^2$.

$$\frac{n}{n\log(2) - \log t} = x \Leftrightarrow n = x(\log(2) - \log t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{x} = n\log(2) - \log t \Leftrightarrow \frac{n}{x} - \log 2 = -\log t$$

$$\Leftrightarrow \log t = \log 2 - \frac{n}{x} \Leftrightarrow t = \exp\left(n\log 2 - \frac{n}{x}\right)$$

$$g(\hat{\theta}) = \exp\left(n\log(2) - \frac{n}{\frac{n}{n\log(2) - \log(t)}}\right) = \exp(n\log(2) -$$