Matemaattisten tieteiden kandiohjelma / MTO

Tilastollinen päättely IIa

Kurssikoe 18.12.2019 (kesto 2h 30min)

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu.

1. Olkoon $\theta > 0$ positiivinen parametri, ja asetetaan

$$f(y;\theta) = \begin{cases} 3\theta^{-1}(y-1)^2 \exp(-(y-1)^3/\theta), & \text{kun } y > 1 \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

Oletetaan, että $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin yllä mainittua jakaumaa. Olkoon $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ annettu aineisto, $y_i > 1$ kaikilla i. Muodosta tämän mallin uskottavuusfunktio ja log-uskottavuusfunktio sekä määritä suurimman uskottavuuden estimaatti $\widehat{\theta}$. Mikä on parametrin $\lambda = \theta^3 + 2\theta$ suurimman uskottavuuden estimaatti?

2. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathrm{P}(\lambda)$ riippumattomia, missä $\lambda > 0$ ja olkoon $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ annettu aineisto, $y_i > 0$ kaikilla i. Laske mallin aineistosta havaittu informaatio $j(\lambda; \mathbf{y})$ sekä mallin Fisherin informaatio $i(\lambda)$ parametrille λ.

3. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n \sim G(2, 2/\mu)$ riippumattomia, gammajakautuneita satunnaismuuttujia, missä $\mu > 0$ ja olkoon $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ annettu aineisto, $y_i > 0$ kaikilla i. Näytä, että estimaattori $\overline{Y} = n^{-1}(Y_1 + \cdots + Y_n)$ on parametrin $g(\mu) = \mu$ harhaton, tarkentuva ja täystehokas estimaattori.

4. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu_0, \sigma^2)$ riippumattomia satunnaismuuttujia, joista μ_0 tunnetaan, mutta $\sigma^2 > 0$ on tuntematon parametri. Johda suurimman uskottavuuden estimaattori $\widehat{\sigma}^2$. Laske mallin Fisherin informaatio $i(\sigma^2)$ varianssiparametrille σ^2. Vastaa lisäksi perustellen kysymyksiin: a) Onko $\widehat{\sigma}^2$ harhaton estimaattori? b) Millaista jakaumaa $\widehat{\sigma}^2$ noudattaa asymptoottisesti? c) Onko $\widehat{\sigma}^2$ tarkentuva estimaattori?

Jakaumia:

- Satunnaismuuttuja $X \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda)$ noudattaa gammajakaumaa parametreilla $\kappa > 0$, $\lambda > 0$. Sen tiheysfunktio on

$$f_X(x; \kappa, \lambda) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}\{\, x > 0 \,\},$$

  odotusarvo $\mathbb{E}X = \kappa/\lambda$ ja varianssi $\operatorname{var} X = \kappa/\lambda^2$. Riippumattomien gammajakautuneitten $X_i \sim \mathrm{G}(\kappa_i, \lambda)$ summa on gammajakautunut $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{G}(\sum \kappa_i, \lambda)$. Jos $X \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda)$ ja $c > 0$ vakio, niin $cX \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda/c)$.

- Satunnaismuuttuja $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ noudattaa eksponenttijakaumaa parametrilla $\lambda > 0$. Tämä on gammajakauman erikoistapaus $\mathrm{Exp}(\lambda) = \mathrm{G}(1, \lambda)$, ja sen tiheysfunktio on

$$f_Y(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y} \mathbf{1}\{\, y > 0 \,\},$$

  odotusarvo $\mathbb{E}Y = 1/\lambda$ ja varianssi $\operatorname{var} Y = 1/\lambda^2$. Eksponenttijakauman kertymäfunktio $F_Y(y) = (1 - e^{-\lambda y})\mathbf{1}\{\, y > 0 \,\}$.

- Satunnaismuuttuja $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ noudattaa normaalijakaumaa parametreilla μ ja $\sigma^2 > 0$. Sen tiheysfunktio on siten

$$f_Z(z; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

  odotusarvo $\mathbb{E}Z = \mu$ ja varianssi $\operatorname{var} Z = \sigma^2$.

- Satunnaismuuttuja $W \sim \mathrm{Tas}(a, b)$ noudattaa tasajakaumaa välillä (a, b), missä $b > a$. Sen tiheysfunktio on

$$f_W(w; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{kun } a < w < b \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

  Odotusarvo $\mathbb{E}W = \frac{1}{2}(a + b)$ ja varianssi $\operatorname{var} W = \frac{1}{12}(b - a)^2$.

- Diskreetti satunnaismuuttuja $W \sim \mathrm{P}(\mu)$ noudattaa Poissonin jakaumaa parametrilla μ. Sen pistetodennäköisyysfunktio on

$$f_W(w; \mu) = \begin{cases} e^{-\mu} \mu^w / w!, & \text{kun } w = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

  Odotusarvo $\mathbb{E}W = \mu$ ja varianssi $\operatorname{var} W = \mu$. Riippumattomien Poisson-jakautuneitten satunnaismuuttujien $X_i \sim \mathrm{P}(\mu_i)$ summa on Poisson-jakautunut $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{P}(\sum \mu_i)$.