Matemaattisten tieteiden kandiohjelma / MTO

Tilastollinen päättely II

2. kurssikoe 6.5.2019 (kesto 2h 30min)

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu.

1. Oletetaan, että havaintoja $y_1, \ldots, y_n$ vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathrm{P}(\mu)$ ovat riippumattomia ja noudattavat Poissonin jakaumaa. Halutaan testata nollahypoteesia $H_0\colon \mu = \mu_0$ kaksisuuntaista vastahypoteesia $H_1\colon \mu \neq \mu_0$ vastaan, kun $\mu_0 > 0$. Muodosta tätä varten uskottavuusosamäärän testisuure $r(\mathbf{y})$ ja Waldin testisuure $w(\mathbf{y})$.

2. Teoriakysymys: Tilastollisen mallin parametri on $\boldsymbol{\theta} \in \Omega$. Nollahypoteesina ja vastahypoteesina ovat $H_0 :: \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0$ ja $H_1\colon \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1$. Selosta lyhyesti (mutta kuitenkin täsmällisesti), miten määritellään

   a) testisuureen t kriittinen alue,

   b) testisuureen t voima,

   c) ka tasaisesti voimakkain testisuure.

   d) Kerro, mitä tarkoitetaan mallin monotonisella uskottavuusosamäärällä.

3. a) Oletaan, että $Y_1, \ldots, Y_6 \sim \mathrm{Tas}(0, \theta)$ $\perp\!\!\!\perp$ ovat riippumattomia tasajakautuneita satunnaismuuttujia ja $\theta > 0$. Olkoon $Y_{(6)} = \max(Y_1, \ldots, Y_6)$. Näytä, että $W = Y_{(6)}/\theta$ on saranasuure. (vihje: näytä, että kertymäfunktio $F_W(t) = t^6$ kun $0 < t < 1$.)

   b) Olkoon $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_6)$ aineisto, $y_i = Y_i(\omega)$ ja merkitään $y_{(6)} = \max(y_1, \ldots, y_6)$. Määrää sellainen $a > 0$, että väli $(y_{(6)}, y_{(6)}/a)$ on parametrin θ luottamustason 99 % luottamusväli a)-kohdan saranasuureen W avulla.

4. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, ja kullakin satunnaismuuttujista tiheysfunktiona on

$$f(y;\theta) = \begin{cases} 3\lambda y^2 \exp(-\lambda y^3), & \text{kun } y > 0 \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

   a) Muodosta tätä kuvaava tilastollinen malli $f_{\mathbf{Y}}$, johda parametrin λ suurimman uskottavuuden estimaattori $\widehat{\lambda}$ ja laske Fisherin informaatio $i(\lambda)$

   b) Johda Waldin testiin perustuva approksimatiivinen 99 %:n luottamusväli parametrille λ, kun aineistona on $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Jakaumia:

- Satunnaismuuttuja $X \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda)$ noudattaa gammajakaumaa parametreilla $\kappa > 0$, $\lambda > 0$. Sen tiheysfunktio on

$$f_X(x; \kappa, \lambda) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}\{ x > 0 \},$$

  odotusarvo $\mathbb{E}X = \kappa/\lambda$ ja varianssi $\operatorname{var} X = \kappa/\lambda^2$. Riippumattomien gammajakautuneitten $X_i \sim \mathrm{G}(\kappa_i, \lambda)$ summa on gammajakautunut $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{G}(\sum \kappa_i, \lambda)$. Jos $X \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda)$ ja $c > 0$ vakio, niin $cX \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda/c)$.

- Satunnaismuuttuja $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ noudattaa eksponenttijakaumaa parametrilla $\lambda > 0$. Tämä on gammajakauman erikoistapaus $\mathrm{Exp}(\lambda) = \mathrm{G}(1, \lambda)$, ja sen tiheysfunktio on

$$f_Y(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y} \mathbf{1}\{ y > 0 \},$$

  odotusarvo $\mathbb{E}Y = 1/\lambda$ ja varianssi $\operatorname{var} Y = 1/\lambda^2$. Eksponenttijakauman kertymäfunktio $F_Y(y) = (1 - e^{-\lambda y}) \mathbf{1}\{ y > 0 \}$.

- Satunnaismuuttuja $Z \sim \chi^2_n$ noudattaa khiin neliön jakaumaa vapausasteella $n > 0$. Tämä on gammajakauman erikoistapaus $\chi^2_n = \mathrm{G}(n/2, 1/2)$ ja sen tiheysfunktio on siten

$$f_Z(z; n) = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)} z^{n/2-1} e^{-z/2} \mathbf{1}\{ z > 0 \},$$

  odotusarvo $\mathbb{E}Z = n$ ja varianssi $\operatorname{var} Z = 2n$.

- Satunnaismuuttuja $W \sim \mathrm{Tas}(a, b)$ noudattaa tasajakaumaa välillä (a, b), missä $b > a$. Sen tiheysfunktio on

$$f_W(w; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{kun } a < w < b \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

  Odotusarvo $\mathbb{E}W = \frac{1}{2}(a + b)$ ja varianssi $\operatorname{var} W = \frac{1}{12}(b - a)^2$.

- Diskreetti satunnaismuuttuja $W \sim \mathrm{P}(\mu)$ noudattaa Poissonin jakaumaa parametrilla μ. Sen pistetodennäköisyysfunktio on

$$f_W(w; \mu) = \begin{cases} e^{-\mu} \mu^w / w!, & \text{kun } w = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

  Odotusarvo $\mathbb{E}W = \mu$ ja varianssi $\operatorname{var} W = \mu$. Riippumattomien Poisson-jakautuneitten satunnaismuuttujien $X_i \sim \mathrm{P}(\mu_i)$ summa on Poisson-jakautunut $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{P}(\sum \mu_i)$.