PROBABILITY II A, 2023 – EXAM (OCT 26)

You are allowed a hand written cheat sheet in the exam (one two-sided A4 sheet) and a function or simpler calculator (not a graphing one nor a symbolic one). Return the cheat sheet with the exam. Each of the four problems below is worth 6 points and if the problem has multiple parts, each part is worth the same number of points. In the first problem, you do not need to justify your answer, but in other problems, you need to justify your work to get points.

Good luck!

Problem 1: True or false

Which claims below are true and which are false (you don't need to justify your work)?

(1) Let Ω be a sample space and $\mathbb{P}$ a probability distribution on Ω. Then for all disjoint events $A, B \subset \Omega$ we have $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$.

(2) Let Ω be a sample space, $\mathbb{P}$ a probability distribution on Ω, and $A \subset \Omega$ an event for which $\mathbb{P}(A) > 0$. Then
$$\mathbb{P}(A^c | A) > 0.$$

(3) Let $E \subset \mathbb{R}$ be a finite set and X a discrete E-valued random variable whose distribution's probability mass function is p_X. Then for each $x \in E$ we have
$$\mathbb{P}(X = x) = p_X(x).$$

(4) Let X and Y be independent random variables and let each of them have as their distribution the (discrete) uniform distribution on $\{-1, 1\}$. Then also the random variable[a] $Z = X \cdot Y$ has as its distribution the uniform distribution on $\{-1, 1\}$.

(5) The cumulative distribution function of a discrete random variable is always a discontinuous function.

(6) Let X be a random variable whose moment generating function M_X exists on some interval $[-t_0, t_0]$ with $t_0 > 0$. Then
$$\mathrm{Var}(X) = M_X''(0) - (M_X'(0))^2.$$

[a] This means that if Ω is the sample space X, Y are defined on, then $Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$ for each $\omega \in \Omega$.

Problem 2: Probability and expectation

Let $q \in (0, 1)$. Let us study an $\mathbb{N}$-valued random variable X whose distribution is the geometric distribution with parameter q namely the probability mass function of the distribution of X is
$$p_X(n) = q(1-q)^n$$
for each $n \in \mathbb{N}$.

(1) Calculate the probability $\mathbb{P}(X \geq n)$ for each $n \in \mathbb{N}$.

(2) Calculate the expectation $\mathbb{E}X$ (you do not need to prove the existence of this nor justify differentiating a series term by term).

Hint: It might be worth recalling the formula for a geometric sum: for each $r \in (-1, 1)$ we have
$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

For the second part, you might want to note that for $n \geq 1$

$$n(1-q)^n = -(1-q)\frac{d}{dq}(1-q)^n.$$

You can swap the order of differentiation and summation freely without further justifications. Alternatively, you could make use of the moment generating function.

Problem 3: Examples or not?

Either give an example of the object described below (and justify why it is an example) or justify why such an object does not exist.

(1) A probability distribution on the sample space $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ with a probability mass function $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ which is constant: for some $a > 0$ we have $p_k = a$ for each $k \in \mathbb{N}$.

(2) A continuous random variable whose distribution has a continuous probability density function but a discontinuous cumulative distribution function.

(3) Two random variables X and Y with different distributions $\mathbb{P}_X \neq \mathbb{P}_Y$, but the same expectation $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$ and the same variance $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$. (So if you come up with an example, you can describe the probability mass functions or probability density functions of the distributions of X and Y, or describe the distributions in some other way).

Problem 4: A sum of independent random variables

(1) Let X and Y be independent random variables, each of them having as their distribution the discrete uniform distribution on $\{0, 1, 2, ..., n\}$. What is the probability mass function of the distribution of the random variable $X + Y$?

(2) Compute the moment generating function of the random variable $X + Y$: $M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}e^{t(X+Y)}$. Note that you don't need part (1) for this. You also do not need to justify the existence of the moment generating function.

Hint: In part (1), you might want to start by showing that $\mathbb{P}(X+Y = k) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X = j, Y = k-j)$, and to try to make use of independence and the knowledge that X, Y are uniformly distributed. In part (2), you might want to not use part (1), but independence.

Email address: `christian.webb@helsinki.fi`

TODENNÄKÖISYYSLASKENTA II A, 2023 – KURSSIKOE (26.10)

Kokeessa on sallittu käsin kirjoitettu muistilappu (yksi kaksipuolinen A4-liuska) sekä funktio- tai nelilaskin. Palauta muistilappu kokeen mukana. Kukin neljästä alla olevasta tehtävästä on kuuden pisteen arvoinen, ja jos tehtävässä on useampi kohta, kukin kohta on saman arvoinen. Ensimmäisessä tehtävässä sinun ei tarvitse perustella vastaustasi, mutta muissa perustelut ovat välttämättömiä pisteiden saamiselle.

Onnea kokeeseen!

Tehtävä 1: Totta vai tarua

Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa ja mitkä eivät (ei tarvitse perustella)?

(1) Olkoon Ω jokin perusjoukko ja $\mathbb{P}$ jokin todennäköisyysjakauma Ω. Tällöin kaikille erillisille tapahtumille $A, B \subset \Omega$ pätee $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$.

(2) Olkoon Ω jokin perusjoukko, $\mathbb{P}$ jokin todennäköisyysjakauma Ω:lla, ja $A \subset \Omega$ tapahtuma jolle $\mathbb{P}(A) > 0$. Tällöin pätee

$$\mathbb{P}(A^c | A) > 0.$$

(3) Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ jokin äärellinen joukko ja X diskreetti E-arvoinen satunnaisluku, jonka jakauman pistemassafunktio on p_X. Tällöin pätee kullakin $x \in E$

$$\mathbb{P}(X = x) = p_X(x).$$

(4) Olkoon X ja Y riippumattomia satunnaislukuja, joista kummankin jakauma on joukon $\{-1, 1\}$ (diskreetti) tasajakauma. Tällöin myös satunnaisluvun[a] $Z = X \cdot Y$ jakauma on joukon $\{-1, 1\}$ (diskreetti) tasajakauma.

(5) Diskreetin satunnaisluvun kertymäfunktio on aina epäjatkuva funktio.

(6) Olkoon X jokin satunnaisluku, jonka momentit generoiva funktio M_X on olemassa jollakin välillä $[-t_0, t_0]$, $t_0 > 0$. Tällöin pätee

$$\mathrm{Var}(X) = M_X''(0) - (M_X'(0))^2.$$

[a] Tämä tarkoittaa, että jos Ω on perusjoukko, jolla X, Y on määritelty, niin $Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$ jokaisella $\omega \in \Omega$.

Tehtävä 2: Todennäköisyys ja odotusarvo

Olkoon $q \in (0, 1)$. Tutkitaan $\mathbb{N}$-arvoista satunnaislukua X, jonka jakauma on geometrinen jakauma parametrilla q, eli X:n jakauman pistemassafunktio on

$$p_X(n) = q(1-q)^n$$

kullakin $n \in \mathbb{N}$.

(1) Laske todennäköisyys $\mathbb{P}(X \geq n)$ kullakin $n \in \mathbb{N}$.

(2) Laske odotusarvo $\mathbb{E}X$ (sinun ei tarvitse todistaa tämän olemassaoloa eikä perustella potenssisarjan derivoimista termeittäin).

Vihje: Tässä kannattaa muistaa geometrisen summan kaava: kullakin $r \in (-1, 1)$ pätee

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Toisessa kohdassa kannattaa huomata, että kun $n \geq 1$

$$n(1-q)^n = -(1-q)\frac{d}{dq}(1-q)^n.$$

Saat vaihtaa summaamisen ja derivoimisen järjestystä ilman perusteluita. Vaihtoehtoisesti voit käyttää momentit generoivaa funktiota.

Tehtävä 3: Esimerkkejä vaiko ei?

Anna joko esimerkki alla kuvatusta objektista (ja perustele miksi se on esimerkki) tai perustele miksei tällaista objektia ole olemassa.

(1) Todennäköisyysjakauma perusjoukolla $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, jonka pistemassafunktio $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ on vakio: jollakin $a > 0$ pätee $p_k = a$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$.

(2) Jatkuva satunnaisluku, jonka jakauman tiheysfunktio on jatkuva funktio, mutta kertymäfunktio on epäjatkuva funktio.

(3) Kaksi satunnaislukua X ja Y, joilla eri jakaumat $\mathbb{P}_X \neq \mathbb{P}_Y$, mutta sama odotusarvo $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$ ja sama varianssi $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$. (Eli jos keksit esimerkin, kerro vaikka X:n jakauman pistemassa- tai tiheysfunktio ja Y:n jakauman pistemassa- tai tiheysfunktio. Tai kuvaile jakaumia muuten.).

Tehtävä 4: Riippumattomien summa

(1) Olkoon X ja Y riippumattomia satunnaislukuja, joista kunkin jakauma on joukon $\{0, 1, 2, ..., n\}$ diskreetti tasajakauma. Mikä on satunnaismuuttujan $X + Y$ jakauman pistemassafunktio?

(2) Laske satunnaismuuttujan $X + Y$ momentit generoiva funktio $M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}e^{t(X+Y)}$. Huomaa, ettet välttämättä tarvitse (1)-osaa tähän. Sinun ei myöskään tarvitse perustella generoivan funktion olemassaoloa.

Vihje: (1)-osassa Kannattaa ehkä yrittää aluksi perustella miksi $\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X = j, Y = k-j)$, sekä yrittää käyttää riippumattomuutta ja tasajakaumatietoa. Toisessa osassa ei ehkä kannata käyttää (1) osaa, vaan riippumattomuutta.

Email address: `christian.webb@helsinki.fi`