PROBABILITY II B, 2023 – EXAM (21.12)

You are allowed one hand written cheat sheet (a two-sided A4 sheet) and a function or elementary calculator (not a graphical one nor one capable of symbolic computations). Each of the **four** problems below is worth six points and if the problem has multiple parts, each one is worth the same number of points. In the first problem, you do not justify your work, but in the other ones, justifying your work is essential for receiving full marks. The last problem is more challenging and it is a good idea to leave it to the end.

Good luck!

Problem 1: True or false

Which of the following claims are true (you do not need to justify your answer)?

(1) If $A \subset \mathbb{R}^2$ is a bounded set whose area $|A|$ is strictly positive $|A| > 0$, thenn $f : A \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1}{|A|}$$
is the probability density function of a continuous probability distribution.

(2) Let (X_1, X_2) be a continuous 2-dimensional random vector, whose distribution has a pdf $f_{(X_1,X_2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ that is a continuous function. Let $F_{(X_1,X_2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be the cumulative distribution function of this distribution. One then has
$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}F_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)$$
for each $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

(3) Let (X_1, X_2) be a continuous random vector and f_{X_1} the pdf of the marginal distribution of X_1. In case $x_1 \in \mathbb{R}$ satisfies $f_{X_1}(x_1) > 0$, the conditional distribution of the random variable X_2 given $X_1 = x_1$ is a continuous distribution.

(4) There exists a normal distribution whose covariance matrix is
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5) The normal distribution with covariance matrix
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$
is a continuous distribution.

(6) Let $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ be a normally distributed two-dimensional random vector and let Σ be strictly positive definite. Then X_1 is a normally distributed random variable.

Problem 2: A continuous

Let $f : [0, 1] \times [0, 2] \to \mathbb{R}$,
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{16}x_2^2.$$

(1) Show that f is the pdf of a 2–dimensional probability distribution.

(2) Let (X_1, X_2) be a 2-dimensional continuous random vector whose distribution has pdf f. Compute the expectation vector of this random vector.

Hint: Integrating a one-dimensional polynomial function should take you quite far here:

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Problem 3: Examples or not?

Either give an example of the object described below (and justify why it is an example) or justify why such an object does not exist.

(1) A continuous random vector (X_1, X_2) for which the marginal distribution of the random variable X_1 is a discrete distribution.

(2) A multivariate normal distribution which is not a continuous distribution.

(3) A two-dimensional normal distribution whose moment generating function is

$$M(t_1, t_2) = e^{2t_1+3t_2+\frac{1}{2}(t_1^2+9t_2^2+6t_1t_2)}.$$

So if you think such a distribution exists, say what its expectation vector and covariance matrix are.

Problem 4: A proof

Let $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ be a n-dimensional random vector, whose distribution is the n-dimensional standard normal distribution: $Y \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id}_n)$. Define for each $k = 1, ..., n$ the random variable

$$X_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j.$$

(1) Show that the random vector $(X_1, ..., X_n)$ is normally distributed, and compute its expectation vector and show that its covariance matrix is $\Sigma = (\Sigma_{ij})_{i,j=1}^n$, where

$$\Sigma_{ij} = \min(i, j).$$

(2) Show that for each $1 \leq k < m \leq n$, the random variables X_k and $X_m - X_k$ are independent.

Hints: In the first part, you might want to recall the definition of a multivariate normal distribution and note that $\mathbb{E}(X_k X_m) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^m \mathbb{E}(Y_j Y_l)$. In the second part, one option is to try to justify why $(X_k, X_m - X_k)$ is a normally distributed random vector and try to recall when the components of a normally distributed random vector are independent. An alternative approach could go through the moment generating function.

Email address: `christian.webb@helsinki.fi`

TODENNÄKÖISYYSLASKENTA II B, 2023 – KURSSIKOE (21.12)

Kokeessa on sallittu käsin kirjoitettu muistilappu (yksi kaksipuolinen A4-liuska) sekä funktio- tai nelilaskin. Kukin **neljästä** alla olevasta tehtävästä on kuuden pisteen arvoinen, ja jos tehtävässä on useampi kohta, kukin kohta on saman arvoinen. Ensimmäisessä tehtävässä sinun ei tarvitse perustella vastaustasi, mutta muissa perustelut ovat välttämättömiä täysien pisteiden saamiselle. Viimeinen tehtävä on haastavampi ja kannattaa jättää viimeiseksi.

Onnea kokeeseen!

Tehtävä 1: Tulko vai tarua

Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa (ei tarvitse perustella)?

(1) Jos $A \subset \mathbb{R}^2$ on rajoitettu joukko, jonka pinta-ala $|A|$ on aidosti positiivinen: $|A| > 0$, niin $f : A \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1}{|A|}$$
on erään jatkuvan jakauman tiheysfunktio.

(2) Olkoon (X_1, X_2) on jatkuva 2-ulotteinen satunnaisvektori, jonka jakauman tiheysfunktio $f_{(X_1,X_2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio. Olkoon $F_{(X_1,X_2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jakauman kertymäfunktio. Tällöin pätee
$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}F_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)$$
jokaisella $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

(3) Olkoon (X_1, X_2) jatkuva satunnaisvektori, ja f_{X_1} satunnaisluvun X_1 reunajakauman tiheysfunktio. Mikäli $x_1 \in \mathbb{R}$ toteuttaa $f_{X_1}(x_1) > 0$, on satunnaisluvun X_2 ehdollinen jakauma ehdolla $X_1 = x_1$ jatkuva jakauma.

(4) On olemassa normaalijakauma, jonka kovarianssimatriisi on
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5) Normaalijakauma, jonka kovarianssimatriisi on
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$
on jatkuva jakauma.

(6) Olkoon $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ normaalijakautunut kaksiulotteinen satunnaisvektori ja olkoon Σ aidosti positiividefiniitti. Tällöin X_1 on normaalijakautunut satunnaisluku.

Tehtävä 2: Laskua

Olkoon $f : [0, 1] \times [0, 2] \to \mathbb{R}$,
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{16}x_2^2.$$

(1) Osoita, että f on erään jatkuvan 2–ulotteisen jakauman tiheysfunktio.

(2) Olkoon (X_1, X_2) 2-ulotteinen jatkuva satunnaisvektori, jonka jakauman tiheysfunktio on f. Laske tämän satunnaisvektorin odotusarvovektori.

Vihje: Tässä pitäisi päästä pitkälle yksiulotteisen polynomifunktion integroimissäännöillä:

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Tehtävä 3: Esimerkkejä vaiko ei?

Anna joko esimerkki alla kuvatusta objektista (ja perustele miksi se on esimerkki) tai perustele miksei tällaista objektia ole olemassa.

(1) Jatkuva kaksiulotteinen satunnaisvektori (X_1, X_2), jolle satunnaisluvun X_1 reunajakauma on diskreetti jakauma.

(2) Moniulotteinen normaalijakauma, joka ei ole jatkuva jakauma.

(3) Kaksiulotteinen normaalijakauma, jonka momentit generoiva funktio on

$$M(t_1, t_2) = e^{2t_1 + 3t_2 + \frac{1}{2}(t_1^2 + 9t_2^2 + 6t_1t_2)}.$$

Eli, jos tällainen normaalijakauma on mielestäsi olemassa, kerro mitkä ovat sen odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi.

Tehtävä 4: Todistus

Olkoon $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ n-ulotteinen satunnaisvektori, jonka jakauma on n-ulotteinen standardinormaalijakauma: $Y \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id}_n)$. Määritellään kullakin $k = 1, ..., n$ satunnaisluku

$$X_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j.$$

(1) Osoita, että satunnaisvektori $(X_1, ..., X_n)$ on normaalijakautunut, ja laske sen odotusarvovektori ja osoita, että sen kovarianssimatriisi on $\Sigma = (\Sigma_{ij})_{i,j=1}^n$, missä

$$\Sigma_{ij} = \min(i, j).$$

(2) Osoita, että kullakin $1 \leq k < m \leq n$, satunnaisluvut X_k ja $X_m - X_k$ ovat riippumattomat.

Vihjeitä: Ensimmäisessä kohdassa voi muistella moniulotteisen normaalijakauman määritelmää, sekä huomata, että $\mathbb{E}(X_k X_m) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^m \mathbb{E}(Y_j Y_l)$. Toisessa kohdassa yksi vaihtoehto on yrittää perustella miksi $(X_k, X_m - X_k)$ on normaalijakautunut satunnaisvektori sekä muistella milloin normaalijakautuneen satunnaisvektorin komponentit ovat riippumattomat. Vaihtoehtoinen lähestymistapa voi kulkea momentit generoivan funktion kautta.

Email address: christian.webb@helsinki.fi