Todennäköisyyslaskenta IIb / Hytönen

Erilliskoe 13.1.2021 (English version on the next page)

1. Olkoon (X, Y) jatkuva satunnaisvektori, jonka tiheysfunktio on $f_{X,Y}(x, y)$.

   (a) Osoita, että satunnaismuuttuja $Z = \dfrac{X}{1 + Y^4}$ on jatkuva ja määritä sen tiheysfunktio.

   (b) Olkoon $f_{X,Y}(x, y) = c \cdot (1 + y^4) \cdot 1\{0 < y < x < 1\}$. Määritä vakio $c > 0$ ja laske EZ.

2. Olkoon f satunnaimuuttujan X tiheysfunktio, ja olkoon $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ jatkuva satunnaisvektori, jonka tiheysfunktio on

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2, y_3) = 6 \cdot f(y_1)f(y_2)f(y_3) \cdot 1\{y_1 < y_2 < y_3\}.$$

   (a) Määritä reunatiheysfunktiot $f_{Y_1,Y_3}(y_1, y_3)$, $f_{Y_1}(y_1)$ ja $f_{Y_3}(y_3)$ tiheysfunktion f ja sitä vastaavan kertymäfunktion F avulla.

   (b) Kirjoita edellä olevat lausekkeet tilanteessa, jossa X noudattaa tasajakaumaa yksikkövälillä $[0, 1]$, päättele, että $Y_1 \not\perp\!\!\!\perp Y_3$.

3. Okoon (X, Y, Z) satunnaisvektori, joka noudattaa standardimultinormaalijakaumaa. Määritä sellaiset kertoimet $a, b, c \in \mathbb{R}$, että satunnaismuuttuja $U = aX + bY + cZ$ toteuttaa molemmat seuraavat ehdot:

   (a) U on riippumaton satunnaismuuttujista $X + 2Y$ ja $3Y + 4Z$,

   (b) $\operatorname{var} U = 1$.

4. Tutkija suorittaa seuraavanlaista kaksivaiheista koesarjaa:

   Ensimmäisessä vaiheessa hän ottaa koeasetelmastaan näytteitä yksi kerrallaan. Todennäköisyydellä p näytteenotto onnistuu ja koeasetelma säilyy ehjänä odottamaan seuraavaa näytteenottoyritystä. Todennäköisyydellä $1 - p$ näytteenotto epäonnistuu ja koeasetelma tuhoutuu: tällöin tutkija ei saa kyseistä näytettä eikä voi myöskään enää ottaa uusia näytteitä. Tämä vaihe jatkuu ensimmäiseen näytteenoton epäonnistumiseen asti.

   Toisessa vaiheessa jokainen onnistunut näyte täytyy vielä jatkokäsitellä. Kunkin näytteen kohdalla tämä onnistuu todennäköisyydellä q ja epäonnistuu todennäköisyydellä $1 - q$. Eri näytteiden jatkokäsittelyt ovat toisistaan riippumattomia.

   Olkoon X onnistuneiden näytteenottojen lukumäärä ja Y niiden näytteiden lukumäärä, joiden jatkokäsittelykin onnistuu.

   (a) Määritä satunnaismuuttujan X jakauma sekä ehdollinen jakauma $Y \mid X$.

   (b) Määritä $E(Y \mid X)$, EY, $\operatorname{var}(Y \mid X)$ ja $\operatorname{var} Y$.

Probability IIb / Hytönen

Exam 13.1.2021 (suomeksi edellisellä sivulla)

1. Let (X, Y) be a continuous random vector with density $f_{X,Y}(x, y)$.

   (a) Show that $Z = \dfrac{X}{1 + Y^4}$ is a continuous random variable and find its density.

   (b) Let $f_{X,Y}(x, y) = c \cdot (1 + y^4) \cdot 1\{0 < y < x < 1\}$. Find the constant $c > 0$ and compute EZ.

2. Let f be the density function of a random variable X, and let $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ be a continuous random vector with density

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2, y_3) = 6 \cdot f(y_1)f(y_2)f(y_3) \cdot 1\{y_1 < y_2 < y_3\}.$$

   (a) Find the marginal densities $f_{Y_1,Y_3}(y_1, y_3)$, $f_{Y_1}(y_1)$ and $f_{Y_3}(y_3)$ in terms of the density f and the related cumulative distribution function.

   (b) Write down the previous expressions in the case that X has uniform distribution on $[0, 1]$, and conclude that $Y_1 \not\perp\!\!\!\perp Y_3$.

3. Let (X, Y, Z) be a random vector with standard multinormal distribution. Find coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$, so that the random variable $U = aX + bY + cZ$ satisfies both conditions below:

   (a) U is independent of $X + 2Y$ and $3Y + 4Z$,

   (b) $\operatorname{var} U = 1$.

4. A scientist is performing a following two-phase series of experiments:

   In the first phase, she extracts samples of her experimental set-up, one at a time. With probability p, a sample is successful and the experimental set-up remains valid for further sampling. With probability $1 - p$, the sampling process fails and the experimental set-up is destroyed: in this case, the scientist doesn't get the sample in question, and she is also not able to extract any further samples. This phase continues until the first failed sampling.

   In the second phase, each successfully extracted sample needs to be processed further. For each sample, this succeeds with probability q and fails with probability $1 - q$. The further processing of different samples are independent of each other.

   Let X be the number of successful samples after the first phase, and Y be the number of samples for which also the second phase was successful.

   (a) Find the distribution of X and the conditional distribution $Y \mid X$.

   (b) Find $E(Y \mid X)$, EY, $\operatorname{var}(Y \mid X)$ and $\operatorname{var} Y$.