Matemaattisten tieteiden kandiohjelma / MTL

Todennäköisyyslaskenta IIb

Erilliskoe 10.1.2018 (kesto 3h 30 min)

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet ja laskin. Huomaa, että tehtävä 5 on tehtäväpaperin kääntöpuolella ja tehtäväpaperin ohessa on luntti.

1. Olkoon $X > 0$ satunnaismuuttuja, jolla $\mathbb{E}(X^3)$ on äärellisenä olemassa.

   a) Oletetaan lisäksi, että $X \sim U(1,2)$. Laske $\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{E}(X^3)$ ja kerro mikä/mitkä seuraavista vaihtoehdoista on/ovat voimassa

   $$\mathbb{E}(X^3) = (\mathbb{E}X)^3, \quad \mathbb{E}(X^3) \leq (\mathbb{E}X)^3, \quad \mathbb{E}(X^3) \geq (\mathbb{E}X)^3,$$

   b) Mikä/mitkä kohdan *a*) vaihtoehdoista on/ovat aina voimassa ilman lisäoletusta $X \sim U(1,2)$? Perustele vastauksesi.

2. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

   $$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(4x-2y), & \text{kun } 0 < y < x < 4 \text{ ja} \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

   Määrää vakio c sekä laske odotusarvo $\mathbb{E}(X^2Y^2)$.

3. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia, jotka ovat tasajakautuneita välillä $(0,1)$ ja riippumattomia. Määritellään satunnaismuuttujat

   $$U = X - 3Y, \qquad V = 2X + 3$$

   Laske satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio $f_{U,V}$. Laske myös satunnaismuuttujan U reunajakauman tiheysfunktio f_U ja ehdollinen tiheysfunktio $f_{V|U}$.

4. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia, joiden jakauman kuvaa hierarkinen malli

   $$\begin{cases} X \mid (Y = y) \sim N(y, y^2) \\ Y \sim \mathrm{U}(2,4) \end{cases}$$

   a) Kerro mallin avulla, mikä on ehdollinen varianssi $\mathrm{var}(X \mid Y)$ ja kerro mallin avulla, mikä on ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(X \mid Y)$. (2p)

   b) Laske $\mathbb{E}X$. (2p)

   c) Laske $\mathrm{var}\, X$. (2p)

5. Olkoon $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3)$ multinormaalijakautunut satunnaisvektori, $\mathbb{E}\mathbf{Z} = (2, 1, 3)$ ja

$$\operatorname{Cov}\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Asetetaan vielä $\mathbf{X} = (Z_1, Z_3)$ ja $\mathbf{Y} = (Z_1, Z_2)$.

a) Määrää satunnaisvektorin $\mathbf{X} - 3\mathbf{Y}$ jakauma.

b) Asetetaan $\mathbf{W} = \mathbf{X} - B\mathbf{Y}$, missä

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Löytyykö sellaista lukua c, jolla satunnaisvektorit $\mathbf{W}$ ja $\mathbf{Y}$ olisivat riippumattomia ja jos löytyy, mikä luku c on? Perustelu vastauksesi.

JAKAUMA	PTNF / TF $f_X(x)$	$\mathbb{E}X$	var X	$M(t)$
$X\sim Bin(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$	$(pe^t+1-p)^n$
$X\sim Bernoulli(p)$	$\Leftrightarrow X\sim Bin(1,p)$			
$X\sim Geom(p)$	$p(1-p)^x$, $x=0,1,\dots$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$p\cdot(1-(1-p)e^t)^{-1}$, $t<\ln(\frac{1}{1-p})$
$X\sim Poi(\theta)$, $\theta>0$	$e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}$, —"—	θ	θ	$\exp(\theta(e^t-1))$
$X\sim U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}1\!\!1\{a<x<b\}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
$X\sim Exp(\lambda)$, $\lambda>0$	$\lambda e^{-\lambda x}1\!\!1\{x>0\}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t)$, $t<\lambda$
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$	$(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$	μ	σ^2	$\exp(\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2)$

MARKOVIN EY: $X\geq 0$, $\mathbb{E}X<\infty \Rightarrow \mathbb{P}(X\geq a)\leq a^{-1}\mathbb{E}X$, $\forall a>0$

TŠEBYŠEVIN EY: $\mathbb{E}X=\mu$, $\mathrm{var}\,X=\sigma^2<\infty \Rightarrow \mathbb{P}(|X-\mu|>t)\leq t^{-2}\sigma^2$ $\forall t>0$

KONVEKSIT FUNKTIOT: , f' kasvava (jos kerran jvasti derva)
$f''\geq 0$ (—"— kahdesti —"—)

↪ TARKKA MÄÄR. $g(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$ $\forall\lambda\in[0,1]$, $\forall x,y\in I$

JENSENIN EY: $g(\mathbb{E}X)\leq\mathbb{E}g(X)$

JOS · g konveksi, · $X\in I$ tn:llä 1, · $\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{E}g(X)$ olemassa

HÖLDERIN EY, CAUCHY–SCHWARZIN EY:

$\mathbb{E}|XY|\leq\|X\|_p\|Y\|_q$ ← kun $p=q=2$ $\Rightarrow |\mathrm{corr}(X,Y)|\leq 1$

kun $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\|X\|_p=(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$

$\mathrm{corr}(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}\,X}\sqrt{\mathrm{var}\,Y}}$, $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathbb{E}((X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y))$

SATUNN. VEKTORIT (sv) $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)$

$\underset{\sim}{X}$ diskreetti ($\mathbb{P}(\underset{\sim}{X}\in A)=\sum_{\underset{\sim}{x}\in A}f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})$, $\underset{\sim}{x}=(x_1,\dots,x_n)$

↓ JAKAUMAN MÄÄRÄÄ SV:N PTNF

SV:N PTNF → $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})=\mathbb{P}(\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{x})=\mathbb{P}(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)$)

YPTNF

$\underset{\sim}{X}$ jva (eli $(X_1,\dots,X_n)$:llä jva yht. jakauma)

↓ JAK. MÄÄRÄÄ SV:N TF

$$\Big(\mathbb{P}(\underset{\sim}{X}\in A)=\int_A f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})d\underset{\sim}{x}=\int_{\mathbb{R}^n}1\!\!1_A(\underset{\sim}{x})f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})d\underset{\sim}{x}$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dx_n\,1\!\!1_A(x_1,\dots,x_n)f_{\underset{\sim}{X}}(x_1,\dots,x_n)\Big)$$

EHDOLLISET JAKAUMAT, KERTOLASKUSÄÄNTÖ, BAYESIN SÄÄNTÖ, MARGINALISOINTI

$\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $\underset{\sim}{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$

$$f_{\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) = f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) f_{\underset{\sim}{Y}|\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{y}|\underset{\sim}{x})$$

voimassa kun $(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y})$ jva
—11— disk
$\underset{\sim}{X}$ disk, $\underset{\sim}{Y}$ jva

$$f_{\underset{\sim}{Y}|\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{y}|\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} \dfrac{f_{\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})}{f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})}, & f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) > 0 \\ 0 & \text{muul.} \end{cases}$$

· f tiheys → voidaan sallia diskreetti osa ja osa jolla jva yht. jak.

MARGINALISOINTI:

$$f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) = \int f_{\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})\,dy$$

↳ summataan disk. integroidaan jvan komponentin yli

$$= \begin{cases} \sum_{\underset{\sim}{y}} f_{\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) & \text{kun } \underset{\sim}{Y} \text{ disk.} \\ \int f_{\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) & \text{kun } \underset{\sim}{Y} \text{ jva} \\ \sum\int \dots & \text{kun } \underset{\sim}{Y}\text{:llä sekä disk. että jva komp.} \end{cases}$$

· $\underset{\sim}{X} \perp\!\!\!\perp \underset{\sim}{Y} \Rightarrow H(\underset{\sim}{X}) \perp\!\!\!\perp G(\underset{\sim}{Y})$ | tiheys

· $\mathbb{E}\, G(\underset{\sim}{Y}) H(\underset{\sim}{X}) = \mathbb{E}\, G(\underset{\sim}{Y})\, \mathbb{E}\, H(\underset{\sim}{X})$ ($\perp\!\!\!\perp$)

· $\mathbb{E}\underset{\sim}{X} = (\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_n)$

· $\mathbb{E}\, H(\underset{\sim}{X}) = (\mathbb{E}\, H_{ij}(\underset{\sim}{X}))_{ij}$

(TTL)
$$\mathbb{E}\, g(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}) = \begin{cases} \sum_{\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}} g(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) f_{\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) & (\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}) \text{ disk} \\ \iint g(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) f_{\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y})\,dx\,dy & (\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}) \text{ jva} \\ \sum\int \quad -11- \end{cases}$$

↑ yli disk

· $\mathbb{E}(\underset{\sim}{Z}^T) = (\mathbb{E}\underset{\sim}{Z})^T$

· $\mathbb{E}(A\underset{\sim}{Z}B + C) = A(\mathbb{E}\underset{\sim}{Z})B + C$

EHD. ODOTUSARVO (vrt) EHDOLLA SUURE ARVO $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}$.

kuin (TTL) yllä mutta ehd. tiheys ↓ ehd. tiheys (voi olla disk)

$$\mathbb{E}(g(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}) | \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}) = \int g(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}) f_{\underset{\sim}{Y}|\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{y}|\underset{\sim}{x})\,dy$$

$$\mathrm{var}(g(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}) | \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}) = m(\underset{\sim}{x})$$
$= v(\underset{\sim}{x})$; määr. kuten varianssi $f_{\underset{\sim}{Y}|\underset{\sim}{X}}$:llä

EHD. ODOTUSARVO (vrt) EHD. SV $\underset{\sim}{X}$:

$$\mathbb{E}(g(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}) | \underset{\sim}{X}) = m(\underset{\sim}{X})$$
$$\mathrm{var}(g(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}) | \underset{\sim}{X}) = v(\underset{\sim}{X})$$

eli nimeä $\underset{\sim}{X}$:ksi

OMINAISUUKSIA:
· $\mathbb{E}\, g(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}) = \mathbb{E}\,\mathbb{E}(g(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}) | \underset{\sim}{X})$
· $\mathrm{var}\, g(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}) = \mathbb{E}\,\mathrm{var}(g(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}) | \underset{\sim}{X}) + \mathrm{var}\,\mathbb{E}(g(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}) | \underset{\sim}{X})$

KOVARIANSSIMATRIISI: $\mathrm{Cov}(\underset{\sim}{X}) = \mathrm{cov}(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{X})$, $\mathrm{cov}(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y}) = \mathbb{E}(\underset{\sim}{X} - \mathbb{E}\underset{\sim}{X})(\underset{\sim}{Y} - \mathbb{E}\underset{\sim}{Y})^T$

· $\mathrm{cov}(A\underset{\sim}{X}, B\underset{\sim}{Y}) = A\,\mathrm{cov}(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y})\,B^T$ ← sam.

$N_n(0, I_n)$: $\underset{\sim}{U} \sim N_n(0, I_n) \Rightarrow$ TF $f_{\underset{\sim}{U}}(\underset{\sim}{u}) = (2\pi)^{-n/2} \exp(-\frac{1}{2}\underset{\sim}{u}^T\underset{\sim}{u})$, $\mathbb{E}\underset{\sim}{U} = 0$, $\mathrm{Cov}(\underset{\sim}{U}) = I_n$.

$N_n(\mu, \Sigma)$: $\underset{\sim}{X} \overset{d}{=} A\underset{\sim}{U} + \mu$, $\mathbb{E}\underset{\sim}{X} = \mu$, $\mathrm{Cov}\,\underset{\sim}{X} = AA^T = \Sigma$. [jos Σ kää.]

$M_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = \exp(\underset{\sim}{t}^T\mu + \frac{1}{2}\underset{\sim}{t}^T\Sigma\underset{\sim}{t})$, $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) = (2\pi)^{-n/2} (\det\Sigma)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\underset{\sim}{x}-\mu))$

TIHEYSFUNKT. MUUNTOKAAVA (MUISTISÄÄNTÖ)

$f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) |\partial \underset{\sim}{x}| = f_{\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{y}) |\partial \underset{\sim}{y}|$, $\underset{\sim}{y} = g(\underset{\sim}{x}) \Leftrightarrow \underset{\sim}{x} = h(\underset{\sim}{y})$, $\dfrac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial \underset{\sim}{y}} = J_h(\underset{\sim}{y})$

$= \det(\underset{\partial/\partial y_j}{D_j} h_i(\underset{\sim}{y}))$

$\frac{d}{dv}\frac{v-3}{2} = \frac{d}{dv}\frac{v}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$