

Matemaattisten tieteiden kandiohjelma /
MTO

Todennäköisyyslaskenta IIB

Kurssikoe 21.12.2018 (kesto 2h 30min)

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu.

1. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x,y) = c(x^2 + 2)(3 - xy) \mathbf{1}\{0 < x < 1, 0 < y < x\}$$

- a) Laske vakion c arvo.
b) Laske satunnaismuuttujan X reunajakauman tiheys f_X .
c) Laske ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(XY | X = x)$, kun $0 < x < 1$.
2. Olkoon X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joista X on tasajakautunut välillä $(0, 1)$ ja $Y \sim U(-1, 1)$. Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = X + 2Y, \quad V = 2X - Y$$

Laske satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio $f_{U,V}$. Laske myös satunnaismuuttujan U reunajakauman tiheysfunktio f_U .

3. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia, joiden jakauman kuvaa hierarkinen malli

$$\begin{cases} X | (Y = y) \sim \text{Exp}(1/y) \\ Y \sim U(1, 3) \end{cases}$$

- a) Kerro mallin avulla, mikä on ehdollinen varianssi $\text{var}(X | Y)$ ja kerro mallin avulla, mikä on ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(X | Y)$. (2p)
b) Laske $\mathbb{E}X$. (2p)
c) Laske $\text{var} X$. (2p)
4. Olkoon $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ ja $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ riippumattomia multinormaalijakautuneita satunnaisvektoreita, joille $\mathbb{E}\mathbf{X} = (0, 0)$ ja $\mathbb{E}\mathbf{Y} = (-1, 1)$ ja

$$\text{Cov } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \text{Cov } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Olkoon $\mathbf{Z} = (X_1 - 2Y_2 + 1, 3Y_1 - X_2, 2X_1 + Y_2 - 2) = (Z_1, Z_2, Z_3)$ ja $\mathbf{W} = (Z_1, Z_3)$. Määrä satunnaisvektorin \mathbf{Z} jakauma sekä satunnaisvektorin \mathbf{W} jakauma. Onko \mathbf{W} mielestäsi jatkuvasti jakautunut, perustele miksi/miksi ei?