Todennäköisyyslaskenta IIb, loka-joulukuu 2020 / Hytönen

Kurssikoe 18.12.2020 (English version on the next page)

1. Olkoon (X, Y) jatkuva satunnaisvektori, ja olkoon $Z = (2 + \sin X) \cdot Y$.
   (a) Osoita, että voit kirjoittaa $(Z, X) = g(X, Y)$, missä $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on diffeomorfismi.
   (b) Perustele, että Z on jatkuva satunnaismuuttuja, ja kirjoita sen tiheysfunktiolle lauseke satunnaismuuttujien X, Y yhteistiheysfunktion avulla.

2. Tarkastellaan kaavaa
$$\operatorname{var} g(X, Y) = E \operatorname{var}(g(X, Y) \mid X) + \operatorname{var} E(g(X, Y) \mid X). \qquad (*)$$
   (a) Oletetaan, että X on jatkuva ja Y on diskreetti satunnaismuuttuja. Kirjoita auki kaava $(*)$ tiheysfunktioiden, integraalien jne. avulla.
   (b) Todista kaava $(*)$. Saat käyttää muita tarvitsemiasi tuloksia, kunhan selvität, mitä tuloksia käytät.

3. Olkoon f satunnaimuuttujan X tiheysfunktio, ja olkoon $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ jatkuva satunnaisvektori, jonka tiheysfunktio on
$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2, y_3) = 6 \cdot f(y_1) f(y_2) f(y_3) \cdot 1\{y_1 < y_2 < y_3\}.$$
   (a) Määritä ehdollinen tiheysfunktio $f_{Y_1,Y_3|Y_2}(y_1, y_3|y_2)$ ja perustele, että $(Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_3) \mid Y_2$.
   (b) Jos X noudattaa tasajakaumaa yksikkövälillä $[0, 1]$, päättele, että $(Y_1, Y_3) \mid (Y_2 = y_2)$ noudattaa erästä kaksiulotteista tasajakaumaa. Missä joukossa?

4. Olkoot $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ riippumattomia, ja määritellään $Y_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ ja $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$.
   (a) Määritä $E\mathbf{Y}$ ja $\operatorname{Cov} \mathbf{Y}$.
   (b) Olkoon $m < n$ ja $y \in \mathbb{R}$. Määritä ehdolliset jakaumat
      i. $Y_n \mid (Y_m = y)$,
      ii. $Y_m \mid (Y_n = y)$.

   (Huom! Jos et osaa ratkaista tätä yleisillä luvuilla m, n, valitse niille jotkut pienet lukuarvot ja ratkaise tämä erikoistapaus, niin saat ainakin osan pisteistä. Sitä paitsi saatat keksiä samalla yleisen ratkaisun.)

Probability IIb, October–December 2020 / Hytönen

Course exam 18.12.2020 (suomeksi edellisellä sivulla)

1. Let (X, Y) be a continuous random vector, and let $Z = (2 + \sin X) \cdot Y$.
   (a) Show that you can write $(Z, X) = g(X, Y)$, where $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is a diffeomorphism.
   (b) Argue that Z is a continuous random variable, and find an expression for its density function in term of the joint density of the random variables X, Y.

2. Let us consider the formula

$$\operatorname{var} g(X, Y) = E \operatorname{var}(g(X, Y) \mid X) + \operatorname{var} E(g(X, Y) \mid X). \tag{$*$}$$

   (a) Suppose that X is a continuous random variable and Y is a discrete random variable. Write out the formula $(*)$ with the help of density functions, integrals etc.
   (b) Prove formula $(*)$. You may apply other results that you need, as long as you explain what results you use.

3. Let f be the density function of a random variable X, and let $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ be a continuous random vector with density function

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2, y_3) = 6 \cdot f(y_1) f(y_2) f(y_3) \cdot 1\{y_1 < y_2 < y_3\}.$$

   (a) Find the conditional density $f_{Y_1,Y_3|Y_2}(y_1, y_3|y_2)$ and argue that $(Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_3) \mid Y_2$.
   (b) If X has a uniform distribution on the unit interval $[0, 1]$, deduce that $(Y_1, Y_3) \mid (Y_2 = y_2)$ has a certain bivariate uniform distribution. Over which set?

4. Let $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ be independent, and let $Y_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ and $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$.
   (a) Determine $E\mathbf{Y}$ and $\operatorname{Cov} \mathbf{Y}$.
   (b) Let $m < n$ and $y \in \mathbb{R}$. Find the condition distributions
      i. $Y_n \mid (Y_m = y)$,
      ii. $Y_m \mid (Y_n = y)$.

   (Note! If you can't solve this with general numbers m, n, choose some small numerical values and solve this special case, and you will get at least some of the point. Besides, you may then realise how to solve the problem in general.)