

Kaksipuolinen A4-kokoinen käsinkirjoitettu muistilappu on sallittu kurssikokeessa. Muita apuvälineitä ei sallita.

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus.

(i) Näytä, että e on metriikka joukossa X , kun

$$e(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}, \quad x, y \in X.$$

(ii) Olkoon $a \in X$ piste. Näytä, että metriikan e kuulille on voimassa

$$B_e(a, r) = B_d(a, r) \text{ kun } 0 < r \leq 1, \text{ ja } B_e(a, 1) = X.$$

2. Olkoon $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Tutki, onko

(i) joukko A avoin euklidisessa avaruudessa $(\mathbb{R}^3, |\cdot|_2)$,

(ii) joukko A suljettu euklidisessa avaruudessa $(\mathbb{R}^3, |\cdot|_2)$.

Perustele huolellisesti !

3. Olkoon E sisätuloavaruus ja $a \in E$ vektori.

(i) Näytä, että $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ on Lipschitz kuvaus, kun

$$f(x) = x \cdot a, \quad x \in E.$$

(ii) Perustele lyhyesti miksi kuvaus f on jatkuva $E \rightarrow \mathbb{R}$.

Normiavaruus $(E, |\cdot|)$ varustetaan sisätulon antamalla normilla $|x| := \sqrt{x \cdot x}$, kun $x \in E$.

4. Olkoon

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}.$$

Määritä joukon A sisäpisteiden joukko $\text{int}(A)$, sulkeuma $\overline{A}$ sekä reunapisteiden joukko ∂A euklidisessa avaruudessa $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_2)$. Perustele huolellisesti !