

Kaksipuolinen A4-kokoinen käsinkirjoitettu muistilappu on sallittu kurssikokeessa. Muita apuvälineitä ei sallita.

1. Olkoon

$$F(x, y) = (x + y, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Näytä, että F on bijektio $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ja etsi lauseke käänteiskuvaukselle F^{-1} .

(ii) Näytä, että F on homeomorfismi $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Tasossa $\mathbb{R}^2$ on euklidinen metriikka $|\cdot|_2$.

2. Olkoon e reaalisuoran $\mathbb{R}$ diskreetti $\{0, 1\}$ -metriikka, sekä

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + e(x_2, y_2), \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

tason $\mathbb{R}^2$ metriikka. Olkoot

$$z_n = (0, 1/n), \quad w_n = ((n+1)/n, 2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Tutki, suppeneeko pistejono (z_n) avaruudessa $(\mathbb{R}^2, d)$.

(ii) Tutki, suppeneeko pistejono (w_n) avaruudessa $(\mathbb{R}^2, d)$.

Perustele huolellisesti!

3. Olkoot $a \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$, sekä $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a|_2 \leq r\}$ suljettu kuula euklidisessa avaruudessa $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2)$. Näytä: jos $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva kuvaus ja $f(x) \neq 0$ kaikilla $x \in B$, niin on olemassa vakio $c > 0$, siten että

$$|f(x)| \geq c$$

kaikilla $x \in B$.

4. Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$$

epätyhjiä suljettuja avaruuden X osajoukkoja, joiden läpimitat

$$d(A_n) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A_n\} \rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

Näytä, että on olemassa yksikäsitteinen piste $x \in X$, siten että

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x\}.$$

Vihje: kiinnitä $x_n \in A_n$ kun $n \in \mathbb{N}$, ja tutki onko (x_n) Cauchy-jono avaruudessa (X, d) .