

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia Ib
Yleistentti 13.6.2018
Erilliskoe 3h30min
Sallitut apuvälineet: Ei apuvälineitä.

Näissä tehtävissä euklidisella avaruudella \mathbb{R}^n tarkoitetaan metristä avaruutta (\mathbb{R}^n, d) , missä $n \in \mathbb{N}$ ja d on euklidinen metriikka

$$d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}$$

kaikilla $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$ merkitään

$$B^n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\} \text{ ja } S^{n-1}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = r\}.$$

t1. (6p.) Ouko euklidisen avaruuden \mathbb{R}^3 osajoukko

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{2}\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \sqrt{2}\}$$

kompakti? Perustele vastauksesi.

t2. (6p.) Olkoon $E = [-2, 2] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. Osoita, että E on euklidisen tason \mathbb{R}^2 yhtenäinen osajoukko, jonka komplementti $\mathbb{R}^2 \setminus E$ ei ole yhtenäinen.

t3. (6p.) Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ jatkuva funktio $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla

$$x \mapsto \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq 1/n \\ 1, & 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Osoita, että jono (f_n) on Cauchy-jono metrisessä avaruudessa $(C([0, 1]), d_1)$, missä $C([0, 1])$ on jatkuvien funktioiden $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ joukko ja d_1 on metriikka $d_1(g, h) = \int_0^1 |g(x) - h(x)| dx$ kaikilla $g, h \in C([0, 1])$.

t4. (6p.) Olkoon (X, d) metrinen avaruus, (x_n) jono joukossa X ja $\beta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektio. Osoita, että jono (x_n) suppenee avaruudessa (X, d) , jos ja vain jos jono $(x_{\beta(n)})$ suppenee avaruudessa (X, d) .

t5. (6p.) Osoita, että avoin euklidinen yksikkökuula $B^2(0, 1)$ ja euklidinen avaruus \mathbb{R}^2 ovat homeomorfisia.