HY / Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Topologia Ib
Kurssikoe 8.5.2019
Sallitut apuvälineet: Ei apuvälineitä.

Näissä tehtävissä euklidisella avaruudella $\mathbb{R}^n$ tarkoitetaan metristä avaruutta $(\mathbb{R}^n, d)$, missä $n \in \mathbb{N}$ ja d on euklidinen metriikka

$$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}$$

kaikilla $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$ merkitään

$$B^n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\} \text{ ja } S^{n-1}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = r\}.$$

Lisäksi, jos X on epätyhjä joukko, niin merkitään $\operatorname{raj}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ on rajoitettu}\}$. Pidetään tunnettuna, että $\operatorname{raj}(X, \mathbb{R})$ on vektoriavaruus ja että funktio $\|\cdot\| : \operatorname{raj}(X, \mathbb{R}) \to [0, \infty[$, joka on määritelty kaavalla $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ kaikilla $f \in \operatorname{raj}(X, \mathbb{R})$, on normi vektoriavaruudessa $\operatorname{raj}(X, \mathbb{R})$.

t1. (6p.) Olkoon X joukko sekä d ja d' ekvivalentteja metriikoita joukossa X. Osoita, että joukon X jono (x_n) suppenee metrisessä avaruudessa (X, d), jos ja vain jos (x_n) suppenee metrisessä avaruudessa (X, d').

t2. (6p.) Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ kompakti joukko. Osoita, että $A = E \times \bar{B}^2((0,0), 1) \subset \mathbb{R}^3$ on euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ kompakti osajoukko.

t3. (6p.) Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ funktio $f_n : B^2((0,0), 1) \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$f_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2\pi k x) \sin(2\pi k y)}{2^k} \qquad \frac{[-1,1]}{2^k} \to 0$$

kaikilla $(x, y) \in B^2((0,0), 1)$. Osoita, että jono (f_n) on Cauchy-jono normiavaruudessa $(\operatorname{raj}(B^2((0,0), 1), \mathbb{R}), \|\cdot\|)$.

t4. (6p.) Osoita, että euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ osajoukot

$$A = S^1((0,0), 1) \quad \text{ja} \quad E = S^1((-1,0), 1) \cup S^1((1,0), 1)$$

eivät ole homeomorfisia.