

Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Vektorianalyysi I, 25.10.2021
Vastausaika on 2,5 tuntia ja loppuaika on palautusaikaa.
Palauta vastauksesi 25.10.2021 ennen klo 12.

Vastausohje: vastaa kaikkiin tehtäviin. Vastauksissa kiinnitä erityisesti huomiota perusteluihin ja välivaiheiden näyttämiseen. Pelkät (oikeatkaan) lukuarvot vastauksina eivät ole kuin puolikkaan tai korkeintaan pisteen arvoiset.

1. Vastaa seuraaviin kohtiin perustellen:

- (a) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaus. Selosta omin sanoin seuraavien käsitteiden yhteys: (1) funktio f on differentioituva pisteessä x_0 ja (2) funktion f osittaisderivaatat ovat olemassa pisteessä x_0 . Valaise asiaa esimerkillä.
Selosta omin sanoin seuraavien käsitteiden yhteys: (1) funktio f on differentioituva pisteessä x_0 ja (3) funktion f osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia pisteessä x_0 . Valaise asiaa esimerkillä. **(6p)**
- (b) Olkoon $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto (x, \ln x, x^x)$. Perustele, miksi f on differentioituva. Määrää kuvauksen f derivaatta. **(2p)**

2. Vastaa seuraaviin kohtiin perustellen:

- (a) Olkoon $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \exp(x_3 + x_4)$. Mihin suuntaan funktio f kasvaa nopeimmin (eli voimakkaimmin) pisteessä $x_0 = (1, -1, -1, 1)$? Mikä on funktion f muutosvauhti pisteessä $x_0 = (1, -1, -1, 1)$? **(4p)**
- (b) Määrää (a)-kohdan funktiolle f affiinikuvaus $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että
- $$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T(x)}{\|x - x_0\|} = 0,$$
- kun $x_0 = (1, -1, -1, 1)$. **(4p)**

3. Vastaa seuraaviin kohtiin perustellen:

- (a) Määrää kuvausten $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 x_3, x_1 + x_2 + x_3)$ ja $g(y_1, y_2) = y_1 \cos y_2$
derivaatat. **(4p)**
- (b) Määrää edellisen kohdan kuvausten f ja g yhdistetyn kuvauksen $h = g \circ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ derivaatta pisteessä $(1, -2, 1)$. **(4p)**