

Vektorianalyysi

Yleistentti 26.01.2012

1. Olkoon $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - \alpha x_2^2}{x_1^2 + \alpha x_2^2},$$

missä $\alpha \geq 0$ on vakio. Määritä ne α :n arvot joilla funktiolla g on raja-arvo origossa, ja laske kyseiset raja-arvot.

2. Määritä funktion $f(x, y) = xy^3$ suurin ja pienin arvo tason suljetussa yksikkökiekossa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$
3. Olkoon $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$. Laske integraali

$$\int_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$$

4. Laskettava

$$\int_{\partial E} \langle n, F \rangle dS,$$

kun $F(x, y) = (x^3 + y, y^3 + x)$ ja $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 4\}$. Tässä a ja b ovat positiivisia vakioita. Tässä merkintä $\langle n, F \rangle$ tarkoittaa vektorikenttien n ja F pistetuloa, ja n on joukon E ulospäin osoittava yksikköulkonormaali.

5. Oletetaan, että funktion $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ Hessen matriisi $\nabla^2 f(x_0)$ kriittisessä pisteessä x_0 on indefiniitti. Osoita, että f :llä ei ole lokaalia ääriarvoa pisteessä x_0 .