

Vektorianalyysi I

Kurssikoe (kokeen kesto 2h 30min), 24.10.2016
Taulokkokirjat ja laskimet eivät ole kokeessa sallittuja.



Kokeessa on **kolme** tehtävää, joista jokaisesta saa maksimissaan 16 pistettä.

1. (a) (6 pistettä) Anna esimerkki funktiosta, jolla on osittaisderivaatat kaikkien muuttujiensa suhteen origossa, mutta joka ei ole differentioituva (eli kurssikirjan termein derivoituva) tässä pisteessä. Selitä, mitä differentioituvuus tarkoittaa.

- (b) (10 pistettä) Olkoon

$$f(y_1, y_2) = (\sin(y_2)e^{y_1}, \cos(y_1)e^{y_2})$$

ja

$$g(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1 - x_2).$$

Laske yhdistetyn kuvauksen $f \circ g$ derivaattamatriisi.

2. (a) (6 pistettä) Selitä, mitä tarkoitetaan funktion f kriittisellä pisteellä. Mikä yhteys on funktion lokaaleilla ääriarvoilla ja sen kriittisillä pisteillä? Perustelee vastauksesi huolella.

- (b) (10 pistettä) Määritä funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1(x_1 + x_2)$$

suurin ja pieni arvo joukossa $D = \{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.

3. (a) (8 pistettä)

Olkoon $f(x, y) = \max(x, y)$, ja $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ tason yksikkönelilö. Laske integraali

$$\int_Q f^2 dx dy.$$

- (b) (8 pistettä) Laske integraali

$$\int_A y dx dy,$$

kun $A = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Handwritten notes and calculations:

- $\cos \theta = \frac{x}{r}$
- $\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$
- $2 + 1 = 3$
- $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$
- $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$
- $(2ax + b) \cdot (2ax + b) = b^2 - 4ac$
- Mat. pist.
- ei lita
- $h = 1 = 0$

Handwritten notes and diagrams:

- Diagram of a sector of a circle with radius r and angle θ .
- Labels: \cos , $-\sin$, $-\cos$, \sin , \cos .
- Labels: Δr , $\Delta r \cdot \theta$.

Handwritten calculations:

- $2x \cdot \sqrt{1-x^2} = 3x^2 - 1$
- $4x^2(1-x^2) = (2x^2 - 1)^2$
- $9x^4 + 1 - 6x^2$
- $4x^2 - 4x^4 = 9x^4 + 1 - 6x^2$