

Yleistetyt lineaariset mallit
Tentti, 21.10.2024

Tentissä saa olla mukana kirjoitusvälineet.

1. Määrittele lyhyesti mutta täsmällisesti seuraavat käsitteet

- a) kanoninen linkkifunktio
- b) saturoitu malli
- c) skaalattu devianssi

2. Olkoon vastemuuttuja y_i $N(\mu_i, \sigma^2)$ -jakautunut ja olkoon

$$g(\mu_i) = \sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j,$$

missä x_{i1}, \dots, x_{ip} ovat havaintoa i vastaavat kovariaattien (selittävien tekijöiden) arvot ja β_1, \dots, β_p vastaavat parametrien arvot. Miten arvot β_1, \dots, β_p tulkitaan, kun "linkkifunktio" $g(\mu)$ on a) identtinen funktio, b) logaritmfunktio? Miten oletus

$$\log(y_i) \sim N\left(\sum_{j=1}^p x_{ij}\beta_j, \sigma^2\right)$$

ja jälkimmäinen tapaus (log-linkkifunktio) poikkeavat käytännössä toisistaan.

3. Negatiivisen binomijakauman pistetodennäköisyysfunktio on

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \frac{\Gamma(\tau + y)}{\Gamma(\tau)y!} \frac{\mu^y \tau^\tau}{(\mu + \tau)^{\tau+y}}, \quad y = 0, 1, 2, \dots; \mu, \tau > 0,$$

jossa Γ -funktion määrittely ei pitäisi olla tämän tehtävän kannalta olennainen.

Johda tätä jakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan odotusarvon ja varianssin lausekkeet parametrien μ ja τ funktioina. Oletetaan, että τ on tunnettu vakio.

4. Ylihajonta binomijakaumamallissa: määritelmä, mahdollisia syitä, ylihajonnan huomiottajättämisen seurauksia, ratkaisuja ylihajontaongelmaan.

Muistin tueksi

Satunnaismuuttujan Y jakauma kuuluu eksponentiaaliseen jakaumaperheeseen, jos sen tiheysfunktio on muotoa

$$f(y; \theta, \phi) = \exp\left\{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)\right\}.$$